

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ\*

Н.А. Исмаилов<sup>1</sup>, Н.С. Мухтарова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан,  
e-mail: [inao212@rambler.ru](mailto:inao212@rambler.ru)

**Резюме.** Рассматривается математическая модель движения в газлифтной скважине, описываемая дифференциальными уравнениями с частными производными гиперболического типа. Уравнения движения газа и ГЖС в частных производных с помощью метода усреднения по времени приводятся к дискретному нелинейному уравнению. Затем решается задача дискретного оптимального управления, заданная в виде дискретного уравнения Эйлера-Лагранжа с квадратичным функционалом и на основе градиентного метода предлагается вычислительный алгоритм для его решения. В конце приводятся числовые результаты, которые подтверждают адекватность математической модели. При анализе математической модели становится ясно, что дебит составляет 43% от объема ГЖС в начале подъемника, т.е. достаточно много смеси, полученной из пласта, теряется при движении в подъемнике. Проводится сравнение с непрерывным результатом с точностью  $10^{-3}$ , который показывает сходимость метода.

**Ключевые слова:** дискретизация, метод одномерного поиска, метод градиента, уравнения Эйлера-Лагранжа.

**AMS Subject Classification:** 49J15, 49J35.

### 1. Постановка задачи

Пусть движение объекта описывается системой дискретных нелинейных разностных уравнений [4]

$$\left. \begin{aligned} y(i+1) &= f_1(y(i)), & 0 \leq i \leq l-1, \\ y(i+1) &= f_2(y(i)), & l \leq i \leq 2l, \\ y(0) &= u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и следующим конечно-разностным уравнением в точке разрыва  $l$ :

$$y(l) = \gamma y(l-1) + \gamma_1(y(l-1))\bar{y} \quad (2)$$

где  $y$  -  $n$ -мерный вектор, определяющий координаты объекта,  $u$  - неизвестные начальные условия данной размерности  $n$  (управление),  $\bar{y}$  - скалярное внешнее возмущение,  $\gamma$  - матрица размерности  $n \times n$ ,  $\gamma_1(y(l-1))$  -  $n$ -мерный вектор.

---

\* Работа поддержана грантом «50+50» Бакинского Государственного Университета  
Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 22.01.2013

Требуется найти такое управление  $u$ , которое удовлетворяет (1), (2) и доставляет функционалу

$$J = \frac{1}{2} y'(2l) \tilde{R} y(2l) + \sum_{i=0}^{2l-1} y'(i) R(i) y(i) + u' \beta u \quad (3)$$

экстремальное значение, где  $\tilde{R}$  – симметричные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $\tilde{R} < 0$  и  $\beta > 0$ ,  $R(i) \geq 0$  – матрица размерности  $n \times n$ .

**Уравнение Эйлера-Лагранжа.** В отличие от [3], в задаче оптимизации (1)-(3) управление входит только как начальное условие и отсутствует в самом уравнении (1). Предположим, что здесь удовлетворяются все условия для существования и единственности решения задачи (1)-(2). Используя результаты [4], составим соответствующий расширенный функционал и запишем дискретное уравнение Эйлера-Лагранжа в следующем виде:

$$\lambda'(i) = 2y'(i)R(i) + \lambda'(i+1) \frac{\partial f(y(i))}{\partial y(i)}, \quad (4)$$

где  $f(y(i)) = \begin{pmatrix} f_1(y(i)) \\ f_2(y(i)) \end{pmatrix}$ ,  $\lambda(i) = \begin{pmatrix} \lambda_1(i) \\ \lambda_2(i) \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq i \leq l-1$ ,  $l \leq i \leq 2l$ .

Краевые условия в этом случае для сопряженной переменной  $\lambda(i)$  [3, 4] представляются в виде:

$$\begin{aligned} \lambda'(2l) &= y'(2l) \tilde{R}, \\ \lambda'(l-1) &= \lambda'(l) \gamma + \lambda'(l) \frac{\partial \gamma_1(y(l-1))}{\partial y(l-1)} \bar{y}, \\ \frac{\partial J}{\partial u} &= 2\beta u + \lambda(0) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Объединяя уравнение (1) с (4), для нахождения  $y(i)$ ,  $\lambda(i)$ , имеем следующую систему дискретных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y(i+1) &= f(y(i)) \\ \lambda'(i) &= 2y'(i)R(i) + \lambda'(i+1) \frac{\partial f(y(i))}{\partial y(i)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

со следующими краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= u, \\ \lambda'(2l) &= y'(2l) \tilde{R} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В точке  $l$  связи между векторами  $y(l)$ ,  $y(l-1)$ ,  $\lambda(l)$ ,  $\lambda(l-1)$  определяются следующими разностными уравнениями [1, 4]:

$$\left. \begin{aligned} y(l) &= \gamma y(l-1) + \gamma_1(y(l-1)) \bar{y}, \\ \lambda'(l-1) &= \lambda'(l) \gamma + \lambda'(l) \frac{\partial \gamma_1(y(l-1))}{\partial y(l-1)} \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Существуют разные алгоритмы для решения задачи (6)-(8)– метод квазилинеаризации [4], градиентный алгоритм [3] и др. Отметим, что решая первое уравнение (6) с заданным условием  $y(0) = u$ , из (7) можем определить значение  $y(2l)$ . С учетом этого, решение системы дискретных дифференциальных уравнений (6) с конечными условиями  $y(2l)$ ,  $\lambda(2l)$ , при помощи (7) позволяет полностью определять  $y(x)$ ,  $\lambda(x)$ . Естественно, что оптимальным значением будет то, которое удовлетворяет соотношению (5). Таким образом, для удовлетворения соотношения (5) можно использовать градиентный метод [3], который выглядит следующим образом.

**Алгоритм 1.**

**Шаг 1.** Выбирая начальное приближение  $u^k$  решается первое уравнение (6) и находится  $y^k(i)$  на интервале  $0 \leq i \leq l-1$ , где  $k$  - номер шага итерации (в первой итерации  $k = 0$ ).

**Шаг 2.** Из первого уравнения (6) находятся  $y^k(i)$  на интервале  $l \leq i \leq 2l$ , где

$$y^k(l) = \gamma y^k(l-1) + \gamma_1(y^k(l-1))\bar{y}.$$

**Шаг 3.** При граничных условиях  $\lambda^k(2l) = \tilde{R}y^k(2l)$  из второго уравнения (6) находятся  $\lambda^k(i)$  на интервале  $l \leq x \leq 2l$ .

**Шаг 4.** При условиях

$$\lambda^k(l-1) = \gamma \lambda^k(l) + \frac{\partial \gamma_1(y^k(l-1))}{\partial y^k(l-1)} \lambda^k(l) \bar{y}$$

из второго уравнения (6) находятся  $\lambda^k(i)$  на интервале  $0 \leq i \leq l-1$

**Шаг 5.** Проверяется условие

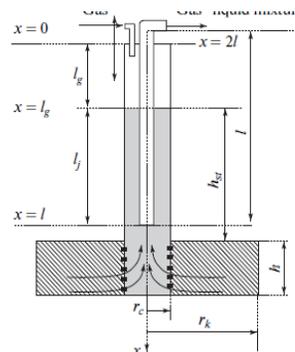
$$J'(u^k) = 2\beta u^k + \lambda^k(0),$$

если оно удовлетворяется с заданной точностью, то переходят к шагу 6, иначе применяется итерационная процедура  $u^{k+1} = u^k + v_k \cdot J'(u^k)$ , где  $v_k$  определяется методом одномерного поиска [5, 6] так, чтобы  $J'(u^k) \rightarrow 0$  и переходят к шагу 1.

**Шаг 6.** Вычисление прекращается и найденное  $u^k$  следует принимать как оптимальное значение.

Газ ГЖС

**Пример.** Изложенный алгоритм апробируем на примере процесса газлифта [6]. Известно, что неустановившееся движение газа в кольцевом пространстве, а ГЖС в вертикальных трубах, т.е. в подъемнике газлифтной скважины с постоянным поперечным сечением, описываются следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1, 2]:



$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho\omega_c)}{\partial t} + 2a\rho\omega_c,$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial(\rho\omega_c)}{\partial x}, \quad (9)$$

где  $P = P(x, t)$ ,  $\omega_c = \omega_c(x, t)$  – соответственно, избыточное давление над ее стационарным значением и усредненная по сечению скорость движения смеси,  $t, x$  – соответственно, время и координата;  $c$  - скорость звука в газе и ГЖС,  $\rho$  – плотность газа, нефти и ГЖС в зависимости от координаты. В подъемнике она определяется выражением  $\rho = \alpha_1\rho_{жс} + \alpha_2\rho_г + \alpha_3\rho_n$ , в котором число слагаемых равно количеству компонентов в смеси, а  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\rho_{жс}, \rho_г, \rho_n$  – соответственно, насыщенности и плотности жидкой, газовой и

твердой фаз;  $2a = \frac{g}{\omega_c} + \frac{\lambda_c \omega_c}{2D}$ ,  $g, \lambda_c$  - ускорение свободного падения и гидравлическое сопротивление;  $D$  – внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства.

Рассмотрим движение ГЖС в вертикальных трубах постоянного поперечного сечения. Предполагается, что скорость газа в ГЖС  $\omega_c = \frac{dx}{dt}$ . При этом на

отрезке трубы высотой  $dx = \omega_c dt$  скорость движения газа и ГЖС  $\omega_c$  можно принять постоянной и равной своему, на этом отрезке, среднему

значению и не зависящему от времени  $t$ .  $\rho\omega_c = \frac{Q}{F}$ ,  $Q = \rho\omega_c F$  - массовый

расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и газожидкостной смеси ГЖС в подъемнике,  $F$  - площадь поперечного сечения насосно-

компрессорных труб и является постоянной по осям. Если в (9) учитывать  $\rho\omega_c = \frac{Q}{F}$  и  $dt = \frac{dx}{\omega_c}$ , то имеем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\omega_c}{F} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2a}{F} \cdot Q \\ -\omega_c \cdot \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{c^2}{F} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Далее, если в (10) умножить первое уравнение на  $c^2$ , второе уравнение на  $-\omega_c$ , потом суммировать эти уравнения, имеем

$$\dot{P} = \frac{2ac^2}{F(\omega_c^2 - c^2)} \cdot Q. \quad (11)$$

Если учесть (11), тогда из второго уравнения (10) получим

$$\dot{Q} = -\frac{2a\omega_c}{\omega_c^2 - c^2} \cdot Q. \quad (12)$$

Далее, если подставить  $\rho\omega_c = \frac{Q}{F}$  в (11) и (12), в этом случае систему (11)-(12) можно привести к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{2a\rho F Q^2}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2}, & Q(0) &= u_0, \\ \dot{P} &= -\frac{2ac^2 \rho^2 F Q}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2}, & P(0) &= P_0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $c \gg \omega_c$  и кроме  $Q = \rho\omega_c F$ , все величины считаются постоянными. Поскольку знаменатели уравнений (11)-(12) не обращаются в нуль и первое уравнение системы (13) не зависит от решения второго уравнения, то ее можно решать отдельно методом разделения переменных.

$$Q(i+1) = Q(i) + \Delta \frac{2a\rho F Q^2(i)}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2(i)}, \quad Q(0) = u_0, \quad (14)$$

$$P(i+1) = P(i) - \Delta \frac{2ac^2 \rho^2 F Q(i)}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2(i)}, \quad P(0) = P_0,$$

где  $\Delta$ -шаг дискретизации,  $c \gg \omega_c$ ,  $Q = \rho\omega_c F$ , все величины считаются постоянными. Так как первое уравнение системы (14) не зависит от решения

второго уравнения, то ее можно решать отдельно методом разделения переменных.

Используя результаты из [6], соотношение между  $Q_0(x)$  и  $P_0(x)$  можно построить в следующем виде:

$$Q_0(x) = \frac{F \varpi_c P_0(x)}{gzrT},$$

где  $g$  – газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура,  $z$  – коэффициент сверхсжимаемости. В начале можно принимать  $z=1$  для идеального газа.

Условие, на забое скважины (т.е. при  $x=l$ ) может быть задано в виде:

$$Q(l) = \gamma Q(l-1) + (-\delta_3(Q(l-1) - \delta_2)^2 + \delta_1) \bar{Q},$$

где  $\gamma$  – постоянная и выбирается для каждой конкретной скважины отдельно, по ее истории,  $\bar{Q}$  – объем флюидов в зоне смешивания.

Нужно найти такое минимальное значение газа  $Q(0)$  из (14), чтобы дебит скважины  $Q(2l)$  получил максимальное значение. Эти условия удовлетворяются минимизацией следующего функционала

$$J = \frac{1}{2} \tilde{R} Q^2(2l) + \beta u^2, \quad (15)$$

где  $\tilde{R} < 0$  и  $\beta > 0$  постоянные весовые коэффициенты, выбор которых ограничит  $Q(2l)$  и  $u$ .

Далее дискретное уравнение Эйлера-Лагранжа для задачи (14)-(15) имеет вид

$$\lambda(i) = 2R(i)Q(i) + \frac{4c^2 \alpha \rho^3 F^2 Q(i)}{(Q^2(i) - c^2 \rho^2 F^2)^2} \lambda(i+1)$$

с краевыми условиями

$$\lambda(2l) = \tilde{R} Q(2l),$$

$$\lambda(l-1) = \gamma \lambda(l) - 2\delta_3(Q(l-1) - \delta_2) \lambda(l) \bar{Q}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 2\beta u + \lambda(0) = 0. \quad (16)$$

Пусть параметры из уравнения (14) имеют следующий вид: при  $0 \leq x \leq l$ :

$l=1485$  м,  $c=331$  м/с,  $\rho = 0.717 \text{ кг/м}^3$ ,  $d = \sqrt{114^2 - 73^2} \cdot 10^{-3}$  м,  $\lambda = 0.01$ ;

при  $l \leq x \leq 2l$ :  $c=850$  м/с,  $\rho = 700 \text{ кг/м}^3$ ,  $d=0.073$  м,  $\lambda = 0.23$ .

Начальное значение управления  $u^0$  примем равным 0.1 и повторяя процедуру 2-4 определяем значения и т.д., где условие оптимальности (16) удовлетворяется с точностью до  $10^{-1}$ . Для достижения точности  $10^{-6}$  требовалось 259 итераций и получен следующий результат:

$$(u^*, Q^*(2l)) = (6.21632 \cdot 10^{-6}, 4.44506).$$

Здесь дебит  $Q^*(2l)$  является 44.54% от  $Q^*(l) = 9.98$ .

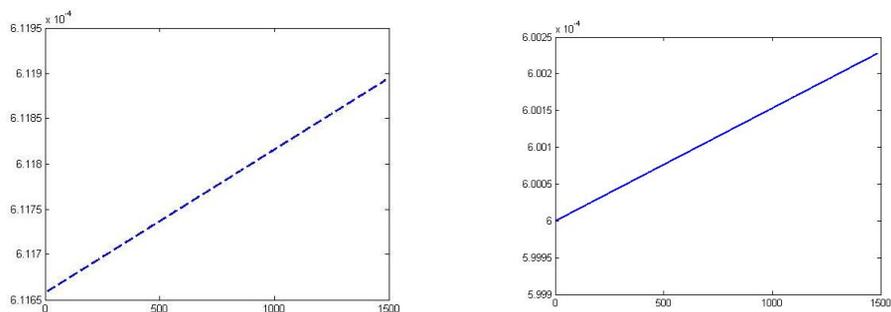


Рис. 1. Изменения подаваемого газа в кольцевом пространстве

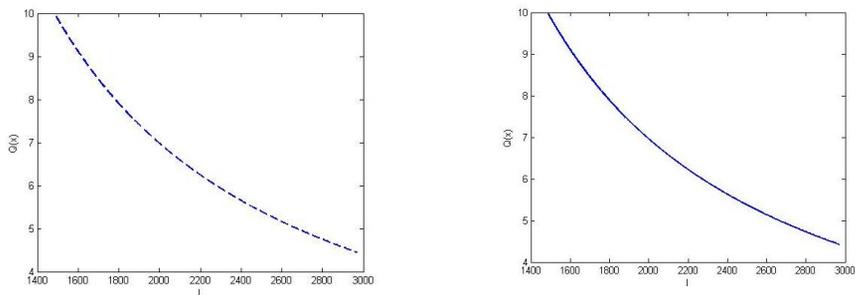


Рис. 2. Изменения ГЖС в подъемнике

### Литература

1. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины, Доклады НАНА, №4, 2008, с.107-116.
2. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.В. Проблемы математического моделирования, оптимизации и управления газлифта, Доклады НАНА, №4, 2009, с.100-117.
3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления, М.: Мир, 1972, 544 с.
4. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Баку, Элм, 1989, 320 с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование, М.: Мир, 1975, 536 с.

6. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of Solving the Choice of Extremal Modes for the Gas-lift Process, Appl. and Comput. Math., Vol.11, No.3, 2012, pp. 348-357.
7. Мирзаджанзаде А.Х. и др. Технология и техника добычи нефти, М.: Наука, 1986.
8. Чарный И.А. Неустановившееся движения реальной жидкости в трубах, М.: Гостехиздат, 1951.

### **Sərhəd idarəetməli diskret optimallaşdırma məsələsinin həlli üsulu**

**N.A. İsmayılov, N.C. Muxtarova**

#### **XÜLASƏ**

İşdə qazlift prosesini təsvir edən xüsusi törəməli hiperbolik tip diferensial tənliklərə baxılır. Xüsusi törəməli tənliklərlə verilmiş qaz və qaz-maye qarışığının hərəkəti zamana görə ortalaşma üsulunun köməyi ilə qeyri-xətti diskret tənliyə gətirilir. Sonda riyazi modelin adekvatlığını göstərən ədədi nəticələr verilir.

**Açar sözlər:** diskretləşdirmə, birölçülü axtarış metodu, qradiyent metodu, Eyler Loqranj tənliyi.

### **Method for solution of the problem of discrete optimization with boundary control**

**Ismailov N.A., Muxtarova N.C.**

#### **ABSTRACT**

In the paper the hyperbolic partial differential equations which describes the process of gas-lift is considered. The proposed equations of gas and gas-liquid mixture are reduced using the averaging method to the form of ordinary differential equations. At the end the numerical example illustrating the adequacy of the model is given.

**Keywords:** discretization one-dimensional search method, the gradient method, the Euler-Lagrange equations.